13. Tutorium - Theoretische Mechanik

① Koordinatensysteme:

Zylinder / Polarkoordinaten:
$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad z = z \qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Kugelkoordinaten:
$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi \qquad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \qquad z = r\cos\vartheta \qquad dx\,dy\,dz = r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta$$

② Konservative Kräfte / Potentiale:

- entlang eines geschlossenen Weges wird keine Arbeit verrichtet (konservativ)

$$\oint_C \vec F(\vec r)\,d\vec r = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec F(\vec r) = -\vec\nabla\Phi(\vec r) \quad\Leftrightarrow\quad \vec\nabla\times\vec F = 0$$

- Identitäten: $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\Phi) = 0$, $\quad \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec F) = 0$

Übungsaufgabe: Wir zeigen den Energiesatz const. $= T + U$ ausgehend von einem zeitunabhängigen, konservativen Kraftfeld mithilfe von Newton II. $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$

Newton II: $\quad m\cdot\ddot{\vec r} = \vec F(\vec r) \quad |\cdot\dot{\vec r}$

$$\Rightarrow m\cdot\dot{\vec r}\,\ddot{\vec r} = \dot{\vec r}\,\vec F(\vec r)$$

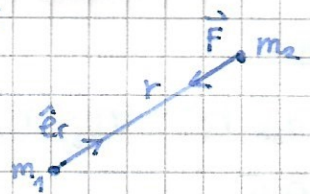
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left(m\cdot\dot{\vec r}^2\right) = -\dot{\vec r}\,\vec\nabla\Phi(\vec r) = -\left(\dot x\frac{\partial U}{\partial x} + \dot y\frac{\partial U}{\partial y} + \dot z\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\cdot\dot{\vec r}^2\right) = -\frac{d}{dt}\Big(U(x(t), y(t), z(t))\Big)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\cdot\dot{\vec r}^2 + U = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T + U = \text{const.}}}$$

③ Newtonsche Gravitation:



Kraft: $\quad \vec F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\hat e_r$

Massenverteilung: $\quad \vec F = -Gm\int_V \frac{\rho(\vec r')}{r'^2}\,\vec e_{r'}\,dV'$

Gravitationsfeld: $\quad \vec g = -\frac{\vec F}{m} \qquad$ Potential: $\quad \Phi(r) = -G\frac{M}{r} = -G\int\frac{\rho(r')}{r}\,d^3r'$

Das Potential außerhalb einer Kugel ist gleich dem eines Massepunktes in der Kugelmitte.

Drehimpuls: $\quad \vec L = \vec r\times m\dot{\vec r} = m(\vec r\times\dot r\,\hat e_r + r\dot\varphi\,\vec r\times\hat e_\varphi) = mr^2\dot\varphi\,\hat e_z = l\,\hat e_z$

Energie: $\quad E = \frac{m}{2}\dot r^2 + \frac{m}{2}r^2\dot\varphi^2 + V(r)$

$$= \frac{m}{2}\dot r^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2} + V(r)}_{\text{effektives Potential}}$$

Keplersche Gesetze:

1. Die Planeten folgen Ellipsenbahnen und die Sonne befindet sich

13. Tutorium - Theoretische Mechanik

① Koordinatensysteme:

Zylinder / Polarkoordinaten:
$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad z = z \qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Kugelkoordinaten:
$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi \qquad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \qquad z = r\cos\vartheta \qquad dx\,dy\,dz = r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta$$

② Konservative Kräfte / Potentiale:

- entlang eines geschlossenen Weges wird keine Arbeit verrichtet (konservativ)

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r} = 0 \iff \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \iff \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$$

- Identitäten: $\text{rot}(\text{grad}\,\Phi) = 0$, $\text{div}(\text{rot}\,\vec{F}) = 0$

Übungsaufgabe: Wir zeigen den Energiesatz const. $= T + U$ ausgehend von einem zeitunabhängigen, konservativen Kraftfeld mithilfe von Newton II. $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$

Newton II: $\quad m\cdot\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \quad | \cdot\dot{\vec{r}}$

$$\Rightarrow m\cdot\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}\,\vec{F}(\vec{r})$$

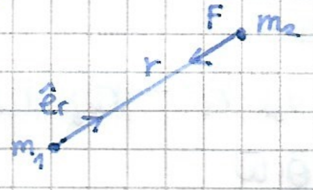
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}(m\cdot\dot{\vec{r}}^2) = -\dot{\vec{r}}\,\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = -\left(\dot{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\cdot\dot{\vec{r}}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(U(x(t), y(t), z(t))\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\cdot\dot{\vec{r}}^2 + U = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T + U = \text{const.}}}$$

③ Newtonsche Gravitation:



Kraft: $\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{e}_r$

Massenverteilung: $\vec{F} = -Gm\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{r'^2}\hat{e}_{r'}\,dV'$

Gravitationsfeld: $\vec{g} = -\frac{\vec{F}}{m}$ $\qquad$ Potential: $\Phi(r) = -G\frac{M}{r} = -G\int\frac{\rho(r')}{r}d^3r'$

Das Potential außerhalb einer Kugel ist gleich dem eines Massepunktes in der Kugelmitte.

Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r}\times m\dot{\vec{r}} = m(\vec{r}\times\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{r}\times\hat{e}_\varphi) = mr^2\dot{\varphi}\,\hat{e}_z = \ell\,\hat{e}_z$

Energie: $E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 + V(r)$

$$= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r)}_{\text{effektives Potential}}$$

Keplersche Gesetze:

1. Die Planeten folgen Ellipsenbahnen, und die Sonne befindet sich

13. Tutorium - Theoretische Mechanik

Beispiel: Trägheitstensor Würfel

$$\hat{\Theta}_{12} = \int \rho \; (-xy) \; dx\,dy\,dz \;=\; \int_{x=-\frac{a}{2}}^{a/2} \int_{y=-\frac{a}{2}}^{a/2} - xya \; dx\,dy$$

$$= \int_{y=-\frac{a}{2}}^{a/2} \left[-\frac{x^2}{2} ya \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy$$

$$= \int_{y=-\frac{a}{2}}^{a/2} \left[-\frac{1}{2}\frac{a^2}{4} ya \right] - \left[-\frac{1}{2}\frac{a^2}{4} ya \right] dy = 0$$

Analog verschwinden alle weiteren Θ_{ij} $i \neq j$

$$\hat{\Theta}_{11} = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{a/2} \int_{-\frac{a}{2}}^{a/2} \int_{-\frac{a}{2}}^{a/2} (y^2 + z^2) \; dx\,dy\,dz = \frac{m}{6} a^2 = \Theta_{22} = \Theta_{33}$$

$$\Rightarrow \Theta = \frac{m}{6} a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Theta^* \leftarrow \text{Hauptachsensystem}$$

5. Lagrange - Formalismus:

Ziel: Auffinden von Bewegungsgleichungen in Systemen, die Zwangsbedingungen unterliegen

Hamiltonsches Prinzip: 1834
- Prinzip der minimalen Wirkung
- Auswählen des Pfades, der das Zeitintegral aus der Differenz von kinetischer und potentieller Energie minimiert

$\Rightarrow$ Lagrange - Funktion: $L = T - U$

Lagrange I: $\dfrac{\partial L}{\partial q_i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \sum_j \lambda_j(t) \dfrac{\partial g_j}{\partial q_i} = 0$ j: Zwangsbed. i: generalisierte Koordinaten

- führt auf Zwangskräfte:

$$\vec{F}_{z_i} = \lambda_i \, \vec{\nabla} g_i(t)$$

Lagrange II: $\dfrac{\partial L}{\partial q_i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$

$\Rightarrow$ generalisierte Koordinaten erfüllen automatisch Zwangsbedingungen

D'Alembertsches Prinzip:

- Zwangskräfte verrichten bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit
- virtuelle Verrückung: $\delta\vec{r}$ instantan + infinitesimal + erfüllt zwangsbedingungen

$$\Rightarrow \vec{F}_z \cdot \delta\vec{r} = 0$$

Kanonischer Impuls: $p_i := \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \overset{\text{konserv.}}{=} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$

Hamilton - Funktion: $H := \sum_i \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \overset{\frac{\partial L}{\partial t}=0}{=} \text{const.}$

Zyklische Koordinaten:
- Lagrange - Funktion ist unabhängig von der generalisierten Koordinate q_k:

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0 \quad \Rightarrow p_k = \text{const.}$$

Noether Theorem:

- Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie gehört eine Erhaltungsgröße
- Symmetrie: Transformation der generalisierten Koordinaten lässt Bewegungsgleichung invariant

6) Hamilton-Formalismus:

Bewegungsgleichungen: $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$